TD Primitives, intégrales

Calculs

Z4P **Exercice 1** Calculer les intégrales

1. $\int_0^1 \frac{x}{x+3}\,\mathrm{d}x$
2. $\int_0^1 \frac{2x}{x-2}\,\mathrm{d}x$
3. $\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2}$
4. $\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}$
5. $\int_0^1 \frac{x^2+x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$
6. $\int_0^1 \frac{3x+2}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x$

5H6 **Exercice 2** Donner une primitive des fonctions suivantes

1. $x \mapsto x\sqrt{1+x^2}$
2. $x \mapsto (1-x)^{\frac{3}{2}}$
3. $x \mapsto \frac{\cos \ln(2x+1)}{2x+1}$
4. ★ $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}$
5. ★ $x \mapsto \tan^2 x$
6. ★ $x \ln(1-3x^2)$

W1C **Exercice 3** Déterminer une primitive de $\tan$ sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

Lien intégrale/primitive

0H6 **Exercice 4** Justifier que la fonction suivante est dérivable, et donner sa dérivée.

1. $h\colon x \mapsto \int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$
2. $h\colon x \mapsto \int_{x^2}^{x^3} e^{t^2}\,\mathrm{d}t$
3. $h\colon x \mapsto \int_x^2 xe^{t^2}\,\mathrm{d}t$
4. ★ $h\colon x \mapsto \int_\pi^{2\pi} \frac{\sin(tx)}{t}\,\mathrm{d}t$

CQL **Exercice 5** Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue impaire.

1. Montrer que $x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est paire. En déduire que toutes les primitives de f sont paires.
2. Que dire quant-à la parité des primitives d'une fonction f paire ?

Manipulations diverses

R1C **Exercice 6** Soient $a < b$ deux réels et $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle valeur moyenne de f sur $[a,b]$ la quantité

$$M(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Quelle est la valeur moyenne d'une fonction constante sur $[a,b]$?
2. Montrer que si f est une fonction affine, sa valeur moyenne sur $[a,b]$ est $f(\frac{a+b}{2})$.
3. Soit f une fonction continue et T-périodique sur $\mathbb{R}$.
   a) Montrer que la valeur moyenne de f sur $[x,x+T]$ est indépendante du réel x. On l'appelle valeur moyenne de f.
   b) Déterminer les valeurs moyennes de $\cos$, $\cos^2$ et de $|\cos|$.

62I **Exercice 7** Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $I_n = \int_0^\pi |\sin(nt)|\,\mathrm{d}t$.

FBG **Exercice 8** ★ Calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t}\,\mathrm{d}t$.

Indication : *Introduire une quantité J judicieuse, et calculer $I \pm J$.*

Intégration par parties

SET **Exercice 9** Calculer l'intégrale

1. $\int_0^2 te^{-\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t$
2. $\int_0^\pi t^2 \sin t\,\mathrm{d}t$

6UM **Exercice 10** Déterminer une primitive de

1. arctan
2. $x \mapsto x\ln x$

6XI **Exercice 11** Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $\int_a^b (t-a)(b-t)\,\mathrm{d}t$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\int_a^b (t-a)^n(b-t)^n\,\mathrm{d}t$

UUX **Exercice 12** Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^x \int_0^u f(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u = \int_0^x f(u)(x-u)\,\mathrm{d}u.$$

XET **Exercice 13**

1. Soit $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $f(0) = f(\pi) = 0$. Calculer $\int_0^\pi (f(t) + f''(t))\sin(t)\,\mathrm{d}t$.
2. Déterminer les fonctions $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $f(0) = f(\pi) = 0$ et $f + f'' \geq 0$.

BF9 **Exercice 14** Soit $I_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x$.

1. À l'aide d'une IPP, établir une relation entre I_n et $\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x$.
2. Établir une relation de récurrence vérifiée par I_n.
3. Calculer I_3.

ZG0 **Exercice 15** ★ [ENS 2021]

1. Soit $I_n = \int_0^1 x^n e^x\,\mathrm{d}x$. Montrer qu'il existe $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$ tels que $I_n = a_n + b_n e$.
2. Montrer que si e est rationnel, il existe $n > 1$ tel que $I_n \in \mathbb{Z}$. Aboutir à une contradiction.

Changements de variable

LOW **Exercice 16** Calculer l'intégrale

1. $\int_1^3 \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,\mathrm{d}x$
2. $\int_3^6 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-2}}$
3. $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(3-x)}}$ **Ind** : *Poser* $x = \frac{3}{1+t^2}$.

EYZ **Exercice 17** Déterminer une primitive de

1. $x \mapsto \frac{1}{\cosh x}$
2. $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$
3. ★ $x \mapsto \frac{1}{\sin x}$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

OH9 **Exercice 18**

1. Soit $\alpha \geq 0$. Montrer que $\int_0^2 \frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+(1-t)^\alpha} + \frac{1}{1+(1+t)^\alpha}\right)\mathrm{d}t$
2. Montrer que pour tout $\alpha \geq 0$, on a $\int_0^2 \frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t \geq 1$.

Inégalités

A9X **Exercice 19** Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe dérivable.

1. Montrer que $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{f(0)+f(1)}{2}$.
2. ★ Montrer que $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \geq \frac{f(0)+f(1)}{2} - \frac{f'(1)-f'(0)}{8}$.

CBS **Exercice 20** $f\colon [0,1] \to [a,b]$ continue telle que $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer que $\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t \leq -ab$.
Indication : *Considérer la quantité* $(f(t)-a)(b-f(t))$.

T28 **Exercice 21** ★ Pour $n \geq 1$, montrer que

$$n\ln n - n \leq \ln(n!) \leq n\ln n.$$

Z52 **Exercice 22** ★ Soit $d > 2$ et $P = \lambda \prod_{k=1}^{d} (X - \alpha_i)$ un polynôme réel scindé tel que $P(1) = P(-1) = 0$ et $\forall x \in]-1,1[,\ P(x) > 0$.

1. Montrer que pour $x \in [-1,1]$ et $\alpha > 1$, $\quad x + \alpha \geq (1+\alpha)^{\frac{1+x}{2}}(\alpha-1)^{\frac{1-x}{2}}$.
2. On note $\mathcal{A}$ l'aire du triangle formé par l'axe des abscisses et les tangentes de P en 1 et -1.
   a) On écrit $P(X) = (1-X)(X+1)Q(X)$. Exprimer $\mathcal{A}$ en fonction de $Q(1), Q(-1)$. Montrer que $\mathcal{A} \leq 2\sqrt{Q(1)Q(-1)}$.
   b) ★ Montrer que
   $$\mathcal{A} \leq \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} P.$$

… et limites

YUY **Exercice 23** Soit $f\colon x \mapsto \int_0^x \lfloor t \rfloor\,\mathrm{d}t$. Montrer que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^2}{2}$, c'est-à-dire que $\frac{f(x)}{\frac{x^2}{2}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.

KBG **Exercice 24** Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x > -1$.

1. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k = \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$.
2. En déduire que
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$
3. En déduire que $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln 2$.

R41 **Exercice 25**

1. Montrer que $\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
2. ★ Montrer que $\int_0^x \sin^2 t \arctan t\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$
Indication : *Commencer par calculer* $\int_0^x \sin^2 t\,\mathrm{d}t$.

K4P **Exercice 26** Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1$. Montrer que

$$\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

On verra au second semestre que ce résultat persiste si l'on suppose seulement f de classe $\mathcal{C}^0$.

OHH **Exercice 27** Déterminer la limite, quand $n \to +\infty$, de $T_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$.

HQL **Exercice 28** ★ Soit $\alpha > 1$. On considère $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$. Montrer que (S_n) converge.

Fonctions lipschitziennes

Q6Z **Exercice 29** On considère $g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{\sin(x^2)}{\sqrt{1+x^2}}$.

1. Justifier que pour $x \in \mathbb{R}$, $|x| \leq \sqrt{1+x^2}$.
2. Montrer que g est lipschitzienne.

Z7E **Exercice 30** ★ Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, c'est-à-dire deux fois dérivable, de dérivée seconde $\mathcal{C}^0$. On suppose f'' bornée par M_2.

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f'(x_0) = M_1 \geq 0$. Déterminer x_1, x_2 vérifiant $x_1 \leq x_0 \leq x_2$ tels que $f(x_2) - f(x_1) \geq \frac{M_1^2}{M_2}$.
2. On suppose que f'' est bornée par M_2, et f est bornée par M_0. Montrer que f' est bornée.